**Optimization Methods Final Reports**

孙仲煜&3119307082

西安交通大学数学与统计学院 西安 邮编：710000

**摘要：**通过《最优化方法》的课程学习，我了解到，优化算法大体上可分为两类，无约束最优化算法与约束最优化算法。在设计优化算法时，我们需要用到一些基本的数值技术，包括线性方程组求解，矩阵分解与矩阵修正，线性搜索技术及信赖域子问题的求解。对于无约束优化问题，求解中小规模最优化问题适用拟牛顿法；求解大规模优化问题时，共轭梯度法以及有限内存拟牛顿法较为适用。对于约束优化问题，根据约束条件的形式又可分为线性约束与非线性约束，其中线性约束优化问题适合用以消去法为主体的可行点算法进行求解；而对于非线性约束优化问题，目前来说还不存在较为通用的方法对所有非线性约束问题进行求解，现存方法主要有罚函数法、乘子法、可行方向法以及SQP法。本文主要通过介绍最优化方法的上述关键技术与方法，结合学习过程中的优化问题求解经验，谈一谈自己的学习心得。

**关键词：**无约束优化、约束优化、线性搜索

# 1 优化的关键技术与方法

最优化问题的求解最后都可以归结为求一个目标函数的极值，而最优化方法的关键技术与方法则是寻找极值点的工具，其形式通常为通过不断迭代，使所选的初始点不断逼近极值点从而获取目标函数局部极小值的方法，那么解迭代后新解移动的方向与步长如何确定呢？这就要根据不同的优化问题选择不同的优化算法，也是我接下来要着重介绍的内容。

## 最优化基础

最优化问题的数学模型一般形式为

其中，，*x*称为优化变量或决策变量，*f(x)*称为目标函数，称为约束函数，称为等式约束，称为不等式约束。和称为约束条件。

定义1：设，，，若存在数，使得

则称向量是在处的下降方向。

定理1：设，在点处可微，若存在向量，使得

则向量是在处的下降方向。

定义2：设，且，如果存在，使得

成立，则称*d*是在处关于集合*D*的一个可行方向。在处关于集合*D*的所有可行方向构成的集合记为。

定义3：设，，若存在序列和，使得

且有和。则称*d*是在处关于集合*D*的一个序列可行方向。在处所有的序列可行方向构成的集合记为。

定义4：设，且，如果

则称是在处关于集合的线性可行方向。在处所有的线性化可行方向构成的集合记为即

引理1：设，如果所有的约束函数都在处一阶连续可微，则

定理2(K-T条件)：设是(NP)的一个局部最优解，和在的某一邻域内一阶连续可微，若

则必存在向量，使得

成立。

对于非线性规划(1.1)，若目标函数是凸函数，约束集合是凸集，则称非线性规划(1.1)是凸规划。对于凸规划，其最优解具有非常好的性质，其局部最优解必是全局最优解。

定理2(凸优化解判定)：设目标函数和约束函数一阶连续可微，若凸规划的可行点是K-T点，则必是最优解。

求解非线性规划(1.1)通常是通过求其K-T点的途径得到它的最优解，一般采用是的迭代法，其基本思想是，给定一个初始点，按照某一规则产生一个迭代序列，使得当是有限点列时，它的最后一个点是K-T点；当是无穷点列时，它的任意一个聚点就是K-T点。迭代序列使得评价函数序列充分单调减少的性质保证了K-T点是局部最优解。

求解非线性规划的算法基本迭代格式如下：

给定初始点

按某一规则构造搜索方向.

确定步长

取下一个迭代点

判别是否满足某些终止准则，若满足，停止迭代过程，是近似局部最优解；否则，转第步。

在上述迭代格式中，关键的两步是构造搜索方向和确定步长。事实上，构造搜索方向和确定步长有许多种方法，不同的构造方向与确定步长的方法构成了求解非线性规划的不同算法。

在有了迭代点和搜索方向后，迭代步长应使非线性规划的评价函数沿射线有所下降，即

由于和已知，评价函数是关于的一元函数，故将求的问题称为线性搜索。

评价函数用于评价迭代过程的进展，在无约束最优化问题中，一般选取评价函数为目标函数，在约束问题中，评价函数包含目标函数和约束函数的信息，以便能判断迭代点的可行性以及评价函数的下降性。对约束问题已经提出了许多不同的评价函数，如由Frishch，Carroll提出的两种障碍函数，由Zangwill提出的精确罚函数及Fletcher(1973)提出的可谓精确罚函数等等。

对于无约束问题，当目标函数用它在处的一阶泰勒展开式来逼近时，得到的求解方法称为梯度法。当目标函数用它在处的二阶泰勒展开式来逼近时，得到的求解方法称为牛顿法。由于二阶泰勒展开式要用到目标函数的二阶导数矩阵，计算工作量大，若用一个由只包含的一阶导数信息构造的对称正定矩阵来代替二阶泰勒展开式中目标函数的二阶导数矩阵时，相应的二次逼近方法称为拟牛顿法。在处近似子问题的解具有目标函数的负梯度方向左乘一个对称正定矩阵的形式，即

当 时，为梯度法；当时，为牛顿法；当用布鲁丹族或黄族修正公式来构造时，便是拟牛顿法。

一维搜索方法的优势及收敛的快慢直接影响到最优化算法的收敛速度，最理想的情况是确定步长使目标函数下降尽可能的大，即要求步长满足

若记，则求满足上式的归结为求一元函数的极小化问题

由于这种搜索是以取得最佳步长为目的，因此称它为精确线性搜索，所得的步长称为最佳步长或最优步长。还有一类搜索方法为不精确的线性搜索法，它只利用一点处的目标函数值和梯度值，它在迭代的每一步使目标函数充分下降，具有计算量较小，算法易于实现等有点。

求解约束最优化问题的方法大致可分为三类。一类是将约束问题转化为一系列无约束问题来求解，用这一系列无约束问题的极小点取逼近原约束问题的最优解，故称这类方法为序列无约束极小化方法。该类具有代表性的方法由惩罚函数法和拉格朗日乘子法；第二类方法是在每个迭代点处构造一个二次函数去逼近目标函数，用线性函数逼近约束函数，在迭代的每一步构成一个二次规划子问题，将对原约束问题的求解转化为对一系列二次规划子问题的求解，以子问题的解作为本次迭代的搜索方向，沿寻优得到新的迭代点，迭代序列最终逼近原约束问题的最优解，故将这类算法称为序列二次规划法。各种方法的差异主要在于构造二次函数的海森矩阵的方法不同；第三类方法是可行方向法，它是一种直接处理约束的方法，它将无约束优化方法推广应用于约束问题，其特点为在迭代过程中目标函数逐次下降且迭代序列始终处于约束区域内，即在可行迭代点处确定一个搜索方向，使得

且是可行点，则称为可行下降方向。这类方法的关键是可行方向的构造，不同的构造的方法构成了不同的可行下降方法。像这种由构造可行下降方法来建立求解约束优化的方法统称为可行方向法，具有代表性的方法有Topkis-Veinott可行方向法、投影梯度法、简约梯度法等等。

误差函数：对于求解非线性规划(NP)的一个数值方法，评价这个方法优劣的标准之一是由该方法产生的迭代序列的收敛速度。设序列收敛于，我们用误差函数

来度量收敛速度。

## 1.2搜索策略

在优化问题中，的选取至关重要，求解的方法有精确线性搜索法，直接搜索法，插值法和不精确线性搜索法等几类，各类方法具有各自的特色，下面分别予以介绍。

### 1.2.1 精确线性搜索

精确线性搜索就是要求选取步长满足

以便获得最大可能的下降，可以通过一元函数的极小化

来求得最优步长，即准则：

在精确线性搜索中，是的精确极小点，而在实际应用中，除了是二次函数的特殊情况外，这是不可能实现的，因为我们不可能在有限步数中求得的精确解，我们智能得到满足一定精度的近似解，退一步讲，求精确解是低效且无必要的一件事情。然而，精确线性搜索还是具有一定的理论价值的，因为许多无约束优化算法的收敛性和收敛速度都是基于精确线性搜索的。

### 1.2.2 搜索区间的确定

在精确线性搜索中要求解方程需要用到目标函数梯度和二阶导数矩阵，计算工作量打，对于某些非光滑函数或导数表达式复杂的函数就不能利用精确线性搜索，对于这样的函数求，可利用直接搜索法和插值法。但是这两种方法都需要事先知道包含的搜索区间，然后在区间上求的近似极小点，下面我们介绍一种确定搜索区间的方法。

该方法的基本思想是：假定是连续函数，逐步确定三点(其中)，使得满足

则在与之间必有的一个极小点，我们便取为搜索区间，具体过程如下：

给定，计算，取步长，令，计算，若，则令，计算；若，则取，则得到搜索区间；否则，令，计算，如此操作，由于是局部凸函数，故存在某个使得

取，则得到一个搜索区间，满足。

若在一开始有，则将两个点的标注互换，则有，。再向左寻找第三个点，令，计算，若，则取，否则，令，计算，如此操作，直到对某个，有，这时取，则得到一个搜索区间，满足。

### 1.2.3 黄金分割法

黄金分割法又称0.618法，是一种简单易行、在实际应用中十分广泛的求在区间上极小点的直接搜索法，是一种线性搜索方法。

该方法的基本思想是：在搜索区间上选取两个对称点，通过比较这两点处的函数值的大小来决定删除左半区间，还是删除右半区间。删除后的新区见的长度是原区间长度的0.618倍，新区间包含原区间中两个对称点中的一个，关于这一点再选取一个对称点，根据新的两对称点处的函数值来确定新区间的删除，不断进行上述过程，直到新区间的长度小于预先指定的精度为止，最后根据最终区间中两个对称点的函数值来确定极小点。

综上所述，0.618法的算法步骤如下：

|  |
| --- |
| 0.618法 |
| 1. 确定，记，，令，给定，. 2. 计算：   ，，  计算：，    ，，，  计算：，   1. ，        1. 输出，停机； |

### 1.2.4 Golden-Stein法

上面介绍的精确线性搜索法和0.618法都是线性搜索法，求得的是的精确极小点或近似极小点，用这些方法求得的的极小点，虽然是的目标函数在每次迭代中下降较多，但计算工作量较大；另一方面来说，在求目标函数的最优解时，没有必要将线性搜索搞得非常精确，尤其是在计算的初始阶段。因此，我们放松对的要求，只要求目标函数在迭代的每一步都有充分下降即可，这一大类方法被称为不精确线性搜索法，具有简单、计算量小的特点，其中应用较为广泛的是Golden-Stein算法。

下面给出Golden-Stein不精确线性搜索法的计算步骤：

|  |
| --- |
| Golden-Stein |
| 1. 给定初始搜索区间，及，，， 2. 计算，，令，，取， 3. 计算   若，则转4；否则，，转5.   1. 若，则，输出；否则，   若，则转5；否则，，转3.   1. ，，转3. |

## 1.3无约束优化方法

无约束优化方法是优化技术中极其重要和基本的内容，它不仅可以直接用来求解无约束优化问题，也可以求解被转化为无约束优化问题的约束优化问题。最速下降法和牛顿法是较为常见的求解无约束问题的最优化方法，这两种算法作为基本算法，在最优化方法中占有重要地位。

### 1.3.1 最速下降法

最速下降法(Steepest Descent)是求解无约束问题最简单的方法，其优点是工作量少，存储变量较少，对初始点要求不高；缺点是收敛慢，效率低。

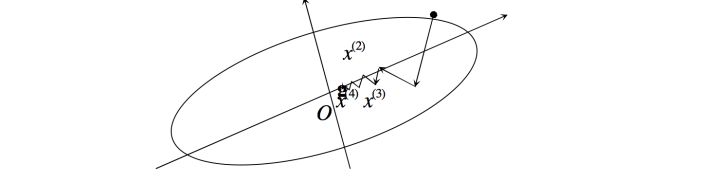
在基本的迭代公式中，每次迭代搜索方向取为目标函数的负梯度方向，即，而每次迭代的步长由线性搜索策略决定，由此确定的算法称为最速下降法。

定理6：设一阶连续可微，是由采用精确线性搜索的最速下降法产生的迭代序列，则的每一个聚点都是的平稳点。

定理7：设是二阶连续可微函数且，对任意给定的初始点，采用精确线性搜索的最速下降法或有限步终止，会有或。

上述两个定理阐述了最速下降法在在选取初始点后迭代序列的性质，并且由于最速下降法的搜索方向是函数在点处的负梯度方向，在点处沿下降的最快，这是函数的局部性质，但对整个求最优解的过程来说不一定是最快的，例如，对于采用精确线性搜索的最速下降法，步长是的极小点，故满足

从而有，这说明最速下降法中相邻两次的搜索方向是互相正交的。对于目标函数是二元函数的极小化问题，从几何上看最速下降法产生的迭代点列移向极小点的路径呈“锯齿状”如下图所示，在迭代开始的最初几步，下降的幅度比较大，但在以后迭代中，随迭代点越来越接近极小点，下降的越来越慢，因而的收敛速度较慢。因此，在计算的开始阶段使用最速下降法较为适合。



综上所述，最速下降法的算法步骤如下：

|  |
| --- |
| 最速下降法(Steepest Descent) |
| 1) 令*k = 0*, 取初始点 迭代精度*,* 根据下述方式进行迭代：  2)  3)  4)  5)  6) 迭代停止条件：< 或 *k+1 = n*, 则停止迭代；否则继续进行如上步骤。 |

### 1.3.2 共轭梯度法

定理3：(求解线性方程组与求解凸二次函数极小点的等价性)：设，其中是阶对称正定矩阵则是线性方程组的解的充要条件是是的极小点，即

共轭梯度法最初是由计算数学家Hestenes和几何学家Stiefel于1952年为求正定系数矩阵线性方程组而独立提出，他们合作的文章*Method of conjugate gradients for solving linear systems*被认为是共轭梯度法的奠基性文章。共轭梯度法的基本思想是把共轭性与最速下降法相结合，利用已知点处的梯度构造一组共轭方向，并沿着此方向进行搜索，求出目标函数的极小点。它仅需利用一阶导数信息，但克服了最速下降法收敛慢的缺点，又避免了牛顿法需要存储和计算海森矩阵并求逆的缺点，共轭梯度法不仅仅是解决大型线性方程组最有用的方法之一，也是解大型非线性优化最有效的算法之一。

定义5(共轭方向)：设是个非零变量，是阶对称正定矩阵，如果对于任意的，有

则称是关于共轭的向量组，或简称是关于共轭的向量。

定理4：关于共轭的向量组中的向量是线性无关的。

定理5：设是阶对称正定矩阵，是一组关于共轭的向量，求解以下二次函数的极小问题：

若从任意的初始点出发，依次沿方向进行精确线性搜索，则至多经过次迭代，可达到上述二次问题的极小点。迭代公式如下：

定义6(残向量)：记，称为在处的残向量。

则的求法如下：

而共轭向量的构造会使用到如下定理。

定理6：设向量线性无关，则这组向量可以构造个关于共轭的向量。

则使用上述定理可选取：

从而得出共轭向量求法如下：

综上所述，共轭梯度法的计算步骤如下:

|  |
| --- |
| 共轭梯度法(Gradient Descent) |
| 1) 任意给定初始点及精度  2)  3)  4)  5)  6) 迭代停止条件：< 或 *k+1 = n*, 则停止迭代；否则继续进行如下步骤。  7)  8) |

### 1.3.3牛顿法

牛顿法的基本思想是在目标函数的极小点的近似点附近将二阶泰勒展开，用展开的二次函数取逼近，将这个二次函数的极小值点作为的一个新的近似点。用一系列二次函数的极小点去逼近的极小点。

设二阶连续可微，是的一个近似点，有泰勒公式有：

令，即

若正定，则存在，由此解出就是二次函数的极小点，即

我们将作为的一个新的近似点，我们称上式为牛顿迭代公式，相应的算法称为牛顿法。

综上所述，牛顿法的计算步骤如下：

|  |
| --- |
| 牛顿法(Newton Method) |
| 1) 令，任意给定初始点及精度  2)  3)  4)  5) 迭代停止条件：< 或 *k+1 = n,* 则停止迭代；否则继续进行如上步骤。 |

### 1.3.4 拟牛顿法

拟牛顿法是求解非线性优化问题最有效的方法之一，在牛顿法的迭代中，我们需要计算海森矩阵的逆矩阵，这一计算比较复杂，换种方式考虑用一个阶矩阵来近似替代逆矩阵，这就是拟牛顿法的基本思想。

首先，我们需要构造目标函数在当前迭代的二次模型：

这里是一个对称正定矩阵，于是我们取上述二次模型的最优解作为搜索方向，并且得到新的迭代点，其中我们要求步长满足条件。这样的迭代与牛顿法类似，其区别在于用近似的矩阵取代替海森矩阵。所以拟牛顿法最关键的地方就在于每一步迭代中的更新。现在假设我们得到一个新的迭代，并得到一个新的二次模型：

我们尽可能利用上一步的信息来选取。具体地，我们要求，从而得到

上述公式被称为割线方程,为保证能较好的近似，构造矩阵的原则，除了只能利用目标函数及其一阶导数信息外，还要满足以下三点：

1. 是对称正定矩阵，从而是下降方向。
2. 是由对的修正得到的，即
3. 必须满足拟牛顿条件

其中，.

在给定初始矩阵后，只要构造的满足拟牛顿条件，相应的算法统称为拟牛顿法，相应的搜索方向称为拟牛顿方向。拟牛顿方向是在椭球范数意义下在处的最速下降方向。由于在迭代过程中的每一步，尺度矩阵总是变化的，故拟牛顿法也成为变尺度法。

## 1.4 线性约束优化方法

线性约束优化问题的一般形式如下：

其中是上的非线性光滑函数，，，。在用迭代法求解上述问题时，不仅仅应该使目标哈纳树的值单调下降，还应该保证迭代点满足约束，即迭代点应是可行点列，这就要求产生迭代点列的搜索方向序列不仅是的下降方向，而且应是约束的可行方向，如果能确定可行下降方向的方法，再结合适当的线性搜索技术，就可以得到不同的求解线性约束优化问题的算法。

### 1.4.1 投影梯度法

最速下降法是求解无约束优化问题的一个基本方法，投影梯度法可以看成是其对线性约束优化问题的推广，设已有优化问题的一个可行点，在可行域上连续可微，则当该可行点位于可行域内部时，的负梯度方向也是可行方向。但当该可行点位于可行域的边界上时，的负梯度方向未必是可行方向，不过我们可取负梯度方向在可行域内的投影为搜索方向，以保证其可行性与下降性，这就是投影梯度法的基本思想。下面给出投影矩阵的概念：

定义7：任给阶矩阵，若，且，则称为投影矩阵

则我们可给出投影梯度法的算法步骤如下：

|  |
| --- |
| 投影梯度法 |
| 1) 选取初始可行点，计算精度，令.  2) 计算，及投影矩阵  3) 取，若，则转4；否则，令  i) 若，则为KT点，停止迭代；否则，  ii) 选取的某个分量，从中删去对应于的列向量得，令  *，*并转4.  4) 求  令，，转2. |

### 1.4.2 简约梯度法

简约梯度法(reduce conjugate method)处理带有线性约束的非线性规划问题的标准形式如下：

其中，为相应约束的右端项。

由于问题具有与标准线性规划问题相同形式的约束，一个自然的想法就是利用单纯形法的思想来处理线性约束优化问题中的约束。在这里我们设行满秩。

将一个可行解的个最大的正分量定义为基变量，其余的个变量定义为非基变量，即任选的一个基，记，将对应划分为，即和分别由基变量和非基变量组成。从而目标函数可写为：

从而将原问题等价地转化为下列仅带有变量非负约束的极小化问题：

利用复合函数的求导法则可得的梯度，因为是关于简化后的个变量的梯度，故称它为的简约梯度。

下面给出简约梯度法的迭代步骤：

|  |
| --- |
| 简约梯度法 |
| 1. 给定初始基本可行解，将其剖分成，其中为基变量，令. 2. 对应于，将分解成。由复合函数求导法则求得，再分别确定和，令. 3. 若，则停止迭代，输出点；否则，求使得   令.   1. 若，则基向量不变，令，转2。若有某个使，则将换出基，而将中具有最大分量的变量换入基，由此构成新的基向量与非基变量，令，转2。 |

## 1.5 非线性约束优化方法

一般的非线性约束最优化问题可表述为：

其中和均为定义于或其某个子域上的实值函数，且中至少有一个使非线性的，为有限正整数，有限集合和分别表示等式约束和不等式约束的指标集合。

我们已经有了许多可以用来求解无约束最优化问题的算法，当碰到上述非线性约束优化问题时，我们首先想到能否将其转化为等价的无约束优化问题，常用的变化方法由两种，一是对问题变量作变换，二是对问题的函数形式作适当的变换。由于约束的非线性性，使得分线性约束优化问题的求解到目前为止仍然没有一种对一切问题均普遍适用的有效算法，且现有算法所能求得的解也往往是局部最优解。

### 1.5.1 罚函数法

在求解无约束优化问题时，只需保证目标函数不断下降并能最终达到最优解即可。但对于非线性约束优化问题时，仅仅使目标函数下降时不够的，我们还应使迭代点列满足或逐渐满足各个约束条件。因此，要想用某个五约束问题替代原来的约束问题，该无约束问题的目标函数必须是约束问题的目标函数与约束函数的某种组合。传统的罚函数法就是通过给原来的目标函数加上一项由约束函数所构成的惩罚项来生成新的目标函数，以便将约束优化问题转化为无约束优化问题的求解。惩罚项的构造原理是：每当某个点不可行时，就要对其处以惩罚，且惩罚值将随着该点不可行性的提高而增大；但当某点为可行点时，则不做任何惩罚。惩罚项的作用就是随着迭代的进行，迫使迭代点不断逼近并最终位于可行域内，以便找到原约束问题的最优解。构造不同的惩罚项，就产生了许多不同形式的罚函数，并由此导出了可用于求解不同特点约束优化问题的多种罚函数法。

对一般的非线性约束最优化问题，在任一点处，等式约束的违反程度可用来度量，不等式约束的违反程度可用来衡量。依照惩罚项的构造原理，显然可取下列函数作为惩罚项：

这里，为选定的常数。为使具有良好的性质，如连续可微性，通常取，这时连续可微，以下不妨假定。由此，可以定义上述非线性约束优化问题的罚函数为:

这里为惩罚因子。

通过上式我们可以观察到，只要选取较大的，就可以通过求解一个无约束优化问题来寻求最优解。然而，在实际计算中，值的确定往往比较困难，所以我们往往是选取一个单调增的罚参数序列，通过求解一系列无约束优化问题来寻求原问题的最优解。因此，罚函数法的迭代步骤如下：

|  |
| --- |
| 罚函数法 |
| 1) 任选初始点，初始罚因子及精度参数，令.  2) 以为初始点，求罚函数的无约束极小点，记其解为。  3) 若，则取为原约束问题的近似最优解，停止迭代；否则，令，，转2. |

由惩罚项的特点，当趋于无穷时，随着的不断增大，对每个不可行点的惩罚也不断增大并趋向于无穷。因此，在对应于的无约束极小化问题的最优解处，的值应不断减小，从而保证逐步趋于可行并最终达到问题的最优解。

### 1.5.2 乘子法

为克服上节中罚函数的病态问题，以便数值求解，我们利用罚函数的思想，考虑如下如下的辅助函数：

由于该函数通过给平方罚函数加上乘子项而得到，常称为乘子罚函数。另一方面，还可将上式看作目标函数由扩充后的拉格朗日函数，故又可称为增广拉格朗日函数。

基于以上分析，我们可以给出乘子法的迭代步骤如下：

|  |
| --- |
| 乘子法 |
| 1) 选取初始点，初始罚因子及精度参数，，这里，令.  2) 以为初始点，求解无约束问题，得.若，则停止迭代。  3) 若，则转4，否则令，转2.  4) 计算，令，，转2. |

在实际应用中，我们往往只能找到增广拉格朗日函数的局部极小点，且在有些情况下函数可能下无界，特别是当太小时，因此有必要对通常的无约束方法进行适当的修正，以确保算法的收敛性和效率。其次，在关于的选取与的增长速度亦根据具体问题适当控制。若取得大一些，则就快一点趋于0，但太大会引起对求无约束极小数值上的困难。而当太小，则不仅会带来增广罚函数无界的潜在危险，而且会使算法收敛很慢，实际中往往是先选取适当的值，在迭代过程中，若发现不收敛于0或收敛得太慢，就增大的值，或者从事先选取好的的一个单调增序列中选取下一个。

# 摄像头多目标优化问题

## 2.1 问题概述

在城市摄像头选址问题中，由于数据规模较为庞大，直接对路网上的所有摄像头进行优化是不现实的，较为明智的策略是先对整个区域内的路网进行点位价值评估后，对高价值点位进行摄像头选址优化，以此节省资源。

在摄像头选址优化中，我们暂时需要考虑三个个目标函数，第一个是摄像头成本函数，第二个是每个摄像头的视域覆盖率函数，第三个目标函数是考虑摄像头重叠区域后，对优化范围内的所有摄像头的总视域覆盖率函数进行优化，我们需要极小化的同时极大化和，其中表示每个摄像头的经纬度；表示摄像头水平角；表示摄像头俯仰角；表示摄像头翻滚角。

针对该大规模多目标组合优化问题，优化的难点主要体现在以下几点：

（1）搜索空间巨大，且搜索空间的先验知识较少。在真实的场景中，为了贴近现实，摄像头的可选点位很多，再加上角度和设备类型这两个变量，因此一个方案的所有可能的取值空间是非常巨大的。此外，组合优化问题的搜索空间不存在像梯度这种确定性的先验知识来帮助搜索，进一步提升了搜索难度。

（2）函数评估较为耗时。在真实场景中，为了贴近现实，栅格点位的划分较为密集，而障碍物也较多且较为形状也较为复杂，因为需要进行视域计算，评估一个方案（解）的最终函数值需要耗费较多的计算时间。

（3）优化目标多了以后，非支配解变多。目前我们只引入了三个优化目标，后面可能会引入更多优化目标，如视频监控系统的抗灾性、寿命的长短等。具有四个或以上优化目标的组合优化问题称为众目标优化问题，其搜索空间中任意两个解互相非支配的概率很大。非支配概念的定义将在之后详细说明，在此可以暂时将其理解为两个解不能分出优劣。因此，对于众目标优化问题，优化算法往往一开始就会累积非常多的低质量非支配解，进而会阻碍其搜索的进行。

（4）算法的通用性差。在一般的顶点覆盖问题上表现较好的算法，放到选址问题上可能就没有那么好的表现了，因为问题的约束条件、规模、变量类型都发生了变化，因此不能将已有的算法直接移植过来。

## 2.2 多目标组合优化问题国内外研究现状

帕累托最优解集为多目标组合优化问题的理想解集，其能够反映出多目标组合优化问题中目标之间的取舍关系，为最终的决策者提供有价值的信息。

因为许多组合优化问题都是NP难的，当问题具有一定规模时，传统的优化方法不能在可接受的时间内求得最优解。元启发式算法则利用组合优化问题本身的性质，通过一些带有随机性的策略快速得到一个或一组次优解。著名的元启发式算法有进化算法（Evolutionary Algorithm）、禁忌搜索算法（Tabu Search）、蚁群优化算法（Ant Colony Optimization）等。

近几年国内外在多目标组合优化问题上的研究可以分为以下几个主要的方向：

1）解决众目标问题中非支配解过多的问题，防止进化算法的种群规模爆炸性增长。

2）应对函数评估过于耗时的问题。在多目标组合优化问题中，有一些问题的函数评估是需要耗费较长时间的，如医疗急救系统设计问题（Trauma System Design Problem），需要通过仿真的方式来评估函数值。针对这个问题，有学者利用代理模型来减少函数评估时间，他们使用随机森林法和径向基函数法来分别构建目标函数的代理模型和约束函数的代理模型。

3）依据问题特性来开发针对性的算法。

4）使用新技术改进已有的多目标算法。

5）使用机器学习等新技术自动生成算法参数。

基于以上调研工作我们了解到，目前业界在多目标组合优化问题上的研究已经取得了一些显著的进展，但依旧存在以下不足：

(1) 缺少对大规模多目标组合优化问题的研究。

(2) 缺少并行的（Parallel）多目标组合优化算法，特别是协作的（Cooperative）并行算法。

(3) 缺少引入元学习（Meta-Learning）技术来提升算法适配问题的的相关研究，

## 2.3 路线概略

1）针对大规模多目标组合优化问题搜索空间大、先验信息少的问题，设计基于并行（分布）式的多目标协同演化算法；

2）针对一些大规模多目标组合优化问题的函数评估较为耗时的问题，设计基于机器学习的自适应代理模型；

3）当问题目标较多时，针对非支配解爆炸性增长的问题，设计粗细粒度的多目标优化算法；

4）针对元启发式算法通用性差的问题，设计基于元学习优化框架的多目标演化算法。

详细的优化方案不能写出来，抱歉。

# 课程收获与建议

理论问题和数值问题的差异一直是数学系的同学们心中的痛，许多同学在之前的学习过程中甚至没有对任何算法进行过数值模拟，而阮老师对这一点非常清楚，所以在课程作业方面特别强调，我们需要自己动手实现算法步骤，而不是调用软件中自带的库来进行计算，这样的学习过程对于我们加深算法的理解有着不可思议的效果：我们需要将某个算法一步一步地通过某种语言实现，那么算法的每一个步骤、算法的输入、输出的数据结构变化形式、迭代逻辑等等方面，许多算法我们自以为学会了，实际上远远不够，而这种“实践学习法”改变了我对“学会”的认知，因此，我觉得《最优化方法》这门课程带给我的收获不仅有阮老师精彩的课程讲解，同时还有这种实践类课程所需要的脚踏实地去动手进行数值模拟的态度，这是我最大的收获。建议方面的话，我觉得阮老师的教学内容与质量已经非常棒了，唯一一点点小问题就是，留学生数量非常少的情况下，老师您能否以中文教学，毕竟留学生也是上过汉语预科的，中文没有您想象的那么差……不过老师您应该是为了让我们习惯英文教学，说起来您还建议我们用英文撰写这篇Final Report，但我能力有限还是没做到……最后，很高兴能跟阮老师您学习这门最优化门课程，感谢！我以后的研究方向应该也是跟优化相关的（导师是孙老师），以后还会有需要向老师您请教的问题，再会！